

Exercice n°1 : (7 points)

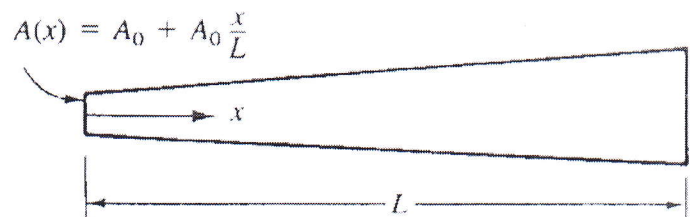
Résoudre l'équation différentielle unidimensionnelle, pour trois éléments :

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \Phi + x = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

En utilisant l'approche variationnelle; soumise aux conditions aux limites : $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$

Exercice n°2 : (6 points)

Dérivez la matrice de rigidité pour la barre non prismatique illustrée à la Figure ci-contre; en utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale.



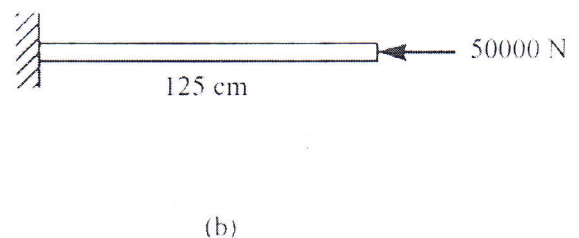
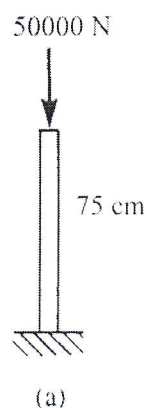
Exercice n°3 : (7 points)

Utilisez le principe de l'énergie potentielle minimale pour résoudre les problèmes de barre illustrés à la figure ci-dessous.

Tracez l'énergie potentielle totale pour les variations du déplacement de l'extrémité libre de la barre afin de déterminer l'énergie potentielle minimale. Observez que le déplacement qui donne l'énergie potentielle minimale donne également la position d'équilibre stable.

Utilisez des incréments de déplacement de $5 \times 10^{-5} m$, en commençant par $x = -10^{-4}$.

Soit $E = 2 \times 10^8 kpa$ et $A = 12 cm^2$ pour les barres.



Ex: 01

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi + x = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

en utilisant l'approche Variationnelle. Soumis aux

C.A.L : $\phi(0) = \phi(1) = 0$

Solution:

* la fonctionnelle I correspondante à l'éq^t diff.
l'éq^t d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \right) = 0$$

l'éq^t diff. : $\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + (\phi + x) = 0$

* $-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \Leftrightarrow -\frac{dF}{d\phi_x} = \frac{d\phi}{dx}$ 0,5

$$\Rightarrow -dF = \phi_x \cdot d\phi_x \Rightarrow \boxed{F = -\frac{1}{2} \phi_x^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2}$$

(1)

* $\frac{\partial F}{\partial \phi} = \phi + x \Rightarrow dF = (\phi + x) \cdot d\phi$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2} \phi^2 + x\phi} \quad \dots (2)$$

Donc la fonctionnelle I correspondante est

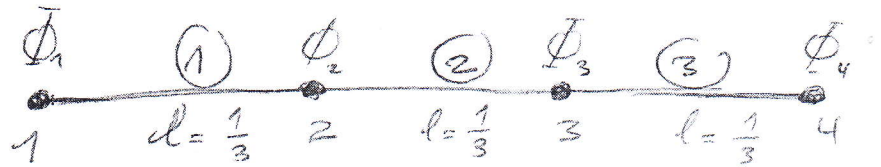
$$\boxed{I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \phi^2 + 2\phi x \right] dx.} \quad \dots (3)$$

Now diviserons le domaine en trois éléments de longueur égale :

$$\bar{\Phi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$



Now supposons un modèle d'interpolation :

$$\phi(x) = [N(x)] \bar{\Phi}^{(e)} = N_i(x) \bar{\Phi}_i^{(e)} + N_j(x) \bar{\Phi}_j^{(e)} \dots (4)$$

$$\text{où } \begin{cases} N_i(x) = (x_j - x) / l^{(e)} \\ N_j(x) = (x - x_i) / l^{(e)} \end{cases}, \quad l^{(e)} = (x_j - x_i)$$

$$\text{Alors : } I = \sum_{e=1}^E I^{(e)} \dots (5)$$

$$\text{où, } I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \left[-\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \phi^2 + 2x\phi \right] dx \dots (6)$$

(4) dans (6) $\rightarrow$

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \left\{ -\bar{\Phi}^{(e)T} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] \bar{\Phi}^{(e)} + \bar{\Phi}^{(e)T} [N]^T [N] \bar{\Phi}^{(e)} + 2x [N] \bar{\Phi}^{(e)} \right\} dx \dots (7)$$

$$\text{pour que : } I \text{ est stationnaire } \Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial \bar{\Phi}_i} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \bar{\Phi}_i} = 0 \dots (8)$$

Donc (8) devient :

$$\sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \bar{\Phi}^{(e)}} = \sum_{e=1}^E \int_{x_i}^{x_j} \left\{ -\left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] \bar{\Phi}^{(e)} + [N]^T [N] \bar{\Phi}^{(e)} + x [N]^T \bar{\Phi}^{(e)} \right\} dx = 0 \dots (9)$$

$$\text{Comme : } \sum_{e=1}^E [K^{(e)}] \bar{\Phi}^{(e)} = \sum_{e=1}^E F^{(e)}$$

$$\text{Alors : } [K^{(e)}] = \int_{x_i}^{x_j} \left\{ \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] - [N]^T [N] \right\} dx \dots (10)$$

$$\text{et: } \vec{P}^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} x [N]^T dx \dots (14)$$

En substituant: $[N(x)] = \left[\frac{x_j - x}{l^{(e)}} \quad \frac{x - x_i}{l^{(e)}} \right]$
dans (10) et (14) on obtient:

$$[K^{(e)}] = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left\{ \frac{-1}{l^{(e)}} \right\} \left\{ \frac{-1}{l^{(e)}} \quad \frac{1}{l^{(e)}} \right\} - \left\{ \frac{x_j - x}{l^{(e)}} \right\} \left\{ \frac{x_j - x}{l^{(e)}} \quad \frac{x - x_i}{l^{(e)}} \right\} \right] dx$$

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{l^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots (12)$$

$$\text{et: } P^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} x \left\{ \frac{x_j - x}{l^{(e)}} \quad \frac{x - x_i}{l^{(e)}} \right\} dx = \frac{1}{6} \left\{ (x_j^2 + x_i x_j - 2 x_i^2) \quad (2 x_j^2 - x_i x_j - x_i^2) \right\}$$

on a: (1) $l^{(1)} = \frac{1}{3}$, $x_i = 0,0$ et $x_j = \frac{1}{3}$

(2) $l^{(2)} = \frac{1}{3}$, $x_i = \frac{1}{3}$ et $x_j = \frac{2}{3}$

(3) $l^{(3)} = \frac{1}{3}$, $x_i = \frac{2}{3}$ et $x_j = 1$

Alors: $[K^{(1)}] = [K^{(2)}] = [K^{(3)}] = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 52 & -55 \\ -55 & 52 \end{bmatrix}$

$P^{(1)} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$; $P^{(2)} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$; $P^{(3)} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$

L'assemblage:

$$[K] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 52 & -55 & 0 & 0 \\ -55 & (52+52) & -55 & 0 \\ 0 & -55 & (52+52) & -55 \\ 0 & 0 & -55 & 52 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 52 & -55 & 0 & 0 \\ -55 & 104 & -55 & 0 \\ 0 & -55 & 104 & -55 \\ 0 & 0 & -55 & 52 \end{bmatrix}$$

$\Phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$

et $P = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2+4 \\ 5+7 \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix}$

En appliquant les C.A.L:

$$\phi_1 = \phi_4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 104 & -55 \\ -55 & 104 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\textcircled{0,5} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,05493 \\ 0,06751 \end{Bmatrix}$$

Ex. 02

Dans ce cas
l'énergie potentielle

totale de la barre est :

$$\pi_p = U + W$$

$$dU = \sigma_x d\varepsilon_x \cdot dV$$

$$U = \iiint_V \left\{ \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \right\} \cdot dV$$

où : $dV = A(x) dx$, $A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$

Alors : $U = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_x \varepsilon_x A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \{d\}^T \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \{d\} A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \{u_1 \ u_2\} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{EA_0}{L^2} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \left(1 + \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

pour que U est minimale $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{A_0 L}{2} \left[\frac{E}{L^2} (2u_1 - 2u_2) \right] + \frac{A_0}{2} \left[\frac{E}{L^2} (2u_1 - 2u_2) \right] \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{3A_0 L}{4} \left[\frac{E}{L^2} (2u_1 - 2u_2) \right] = f_1$$

De même manière : $\frac{\partial U}{\partial u_2} = \frac{3AL}{4} \left[\frac{E}{L^2} (2u_2 - 2u_1) \right] = f_2$

Alors : $K = \frac{3AE}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

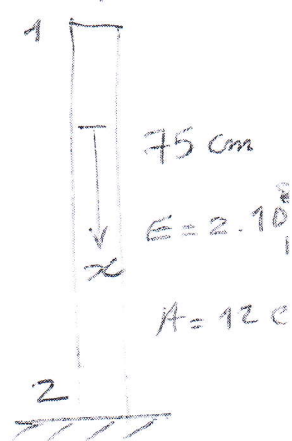
Ex: 3

Dans ce système l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\pi_p = \frac{AL}{2} \{d^T\} [B] [D] [B] \{d\} - \{d^T\} \{f\}$$

$$\pi_p = \frac{AL}{2} u_1^2 \frac{E}{L} - u_1 f$$

$$\pi_p = \frac{AE}{2L} u_1^2 - u_1 f$$



2)

$$\pi_p = \frac{(12 \cdot 10^{-4})(2 \cdot 10^8 \cdot 10^3)}{2 \cdot (75) \cdot 10^{-2}} u_1^2 - u_1 (50000)$$

$$\pi_p = (16000 u_1^2 - 5 u_1) \cdot 10^4$$

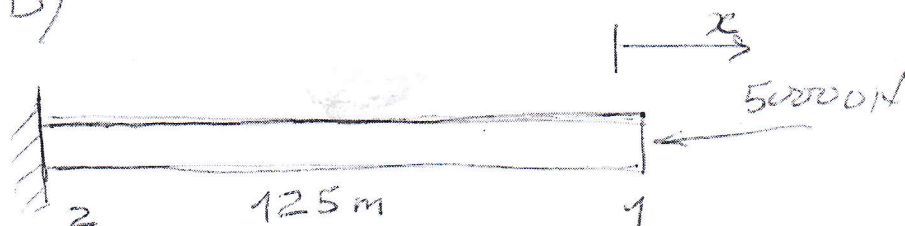
$$\pi_{p \min} = -3,9 \text{ N.m}$$

$$\text{ou: } \frac{\partial \pi_p}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow (32000 u_1 - 5) \cdot 10^4 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 0,00015625$$

$u_1 (\text{m})$	$\pi_p (\text{N.m})$
-0,0001	6,6
-0,00005	2,9
0	0
0,00005	-2,1
0,0001	-3,4
0,00015	-3,9
0,0002	-3,6
0,00025	-2,5

b)



$$\pi_p = \frac{AE}{2L} u_1^2 - f u_1$$

$$\pi_p = \frac{(12 \cdot 10^{-4})(2 \cdot 10^{11})}{2 \cdot (125) \cdot 10^{-2}} u_1^2 - 50000 u_1$$

$$\pi_p = (96 \cdot 10^6) u_1^2 - (5 \cdot 10^4) u_1$$

$$\pi_{p \min} = -13,00 \text{ N.m}$$

$u_1 (\text{m})$	$\pi_p (\text{N.m})$
-0,0001	5,96
-0,00005	2,74
0	0
0,00005	-2,26
0,0001	-4,04
0,00015	-5,34
0,0002	-6,16
0,00025	-6,50
0,0003	-6,36
0,00035	-5,74